HAL open science

Orbite nilpotente minimale

Thierry Levasseur, Patrice Tauvel

▶ **To cite this version:**

Thierry Levasseur, Patrice Tauvel. Orbite nilpotente minimale. 1994. hal-04723013

HAL Id: hal-04723013

https://hal.univ-brest.fr/hal-04723013v1

Preprint submitted on 6 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Orbite nilpotente minimale

THIERRY LEVASSEUR ET PATRICE TAUVEL

1. Notations

1.1. Dans toute la suite, $\Bbbk$ est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie *simple* de dimension finie et de rang l. Toutes les notions topologiques utilisées sont relatives à la topologie de Zariski sur $\mathfrak{g}$. On désigne par G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et par K sa forme de Killing. Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\#E$.

1.2. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Soient R le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, B une base de R, R^+ (resp. R^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) relativement à B. Pour $\alpha \in R$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est l'espace radiciel associé à α. On pose :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Si $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on note $(\lambda|\mu) = K(H_\lambda, H_\mu)$ où, pour $\nu \in \mathfrak{h}^*$, H_ν est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ vérifiant $K(H_\nu, H) = \nu(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

1.3. On note θ la plus grande racine de R définie par B, H l'élément de $[\mathfrak{g}^\theta, \mathfrak{g}^{-\theta}]$ vérifiant $\theta(H) = 2$, et E, F des éléments de $\mathfrak{g}^\theta$ et $\mathfrak{g}^{-\theta}$ tels que $[E, F] = H$.

1.4. Dans la suite, l'expression "sous-algèbre parabolique" signifiera "sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ distincte de $\mathfrak{g}$".

Soient Σ une partie non vide de B et $T(\Sigma)$ l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients négatifs ou nuls des éléments de $B \backslash \Sigma$. On pose :

$$\mathfrak{p}(\Sigma) = \mathfrak{b} + \sum_{\alpha \in T(\Sigma)} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Alors $\mathfrak{p}(\Sigma)$ est une sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ et toute sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ s'obtient de cette manière ([1], p.89). On notera $l(\mathfrak{g})$ la codimension minimale des sous-algèbres paraboliques.

1.5. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^X$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{O}_X$ la G-orbite de X. On a $\dim \mathcal{O}_X = \operatorname{codim} \mathfrak{g}^X$. Soit $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des éléments nilpotents (resp. semi-simples) non nuls de $\mathfrak{g}$. On pose :

$$n(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\, X \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}\}, \quad \mathcal{S} = \{X \in \mathfrak{g};\, \dim \mathcal{O}_X = n(\mathfrak{g})\},$$
$$n_1(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\, X \in \mathcal{N}\}, \quad n_2(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\, X \in \mathcal{D}\}.$$

Le but de ce travail est de retrouver, avec des méthodes élémentaires n'utilisant pas les tables des systèmes de racines, les résultats de [4] concernant $\mathcal{S}$. Indiquons aussi pourquoi certaines preuves de [4] à ce sujet sont inexactes. Nous utilisons, dans cet alinéa, les notations des tables de [1], p. 250-275.

Soit $\Gamma = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\theta) > 0\}$. Définissons $k(\mathfrak{g})$ par $2k(\mathfrak{g}) = 1 + \#\Gamma$. Dans [4], lemme 3.1, (qui est essentiel pour la preuve du résultat principal du paragraphe 3), il est affirmé :

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A_l, et si $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique vérifiant $1+\operatorname{codim}\mathfrak{p} \leq 2k(\mathfrak{g})$, alors $\mathfrak{p}$ est maximale. En outre, si la racine simple qui définit $\mathfrak{p}$ a un coefficient strictement supérieur à 1 dans θ, alors $1 + \operatorname{codim}\mathfrak{p} = 2k(\mathfrak{g})$.

Ces deux affirmations sont inexactes :

a) Dans une algèbre de type D_4, on obtient $k(\mathfrak{g}) = 5$. Les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}(\alpha_1, \alpha_3)$, $\mathfrak{p}(\alpha_1, \alpha_4)$ et $\mathfrak{p}(\alpha_3, \alpha_4)$ ne sont pas maximales, et ont pour codimension 9. Elles vérifient l'inégalité $1 + \operatorname{codim}\mathfrak{p} \leq 2k(\mathfrak{g})$.

b) Dans une algèbre de type B_3 (resp. B_4), on a $k(\mathfrak{g}) = 4$ (resp. $k(\mathfrak{g}) = 6$). La sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}(\alpha_3)$ (resp. $\mathfrak{p}(\alpha_4)$) est de codimension 6 (resp. 10). Elle vérifie l'inégalité stricte $1 + \operatorname{codim}\mathfrak{p} < 2k(\mathfrak{g})$. Pourtant, α_3 (resp. α_4) a un coefficient égal à 2 dans θ.

2. Les résultats

2.1. Soit $X \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}$. On définit une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ par

$$K_X(Y, Z) = K(X, [Y, Z]) \qquad (Y, Z \in \mathfrak{g})$$

Le noyau de K_X est $\mathfrak{g}^X$, et la dimension d_X d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour K_X est donnée par $2d_X = \dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}^X$. Un sous-espace totalement isotrope pour K_X est dit subordonné à X. Une polarisation en X est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est un sous-espace totalement isotrope maximal pour K_X. On dit que X (ou $\mathcal{O}_X$) est polarisable s'il existe une polarisation $\mathfrak{p}$ en X. S'il en est ainsi, $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique ([3], lemme 1.1) et $\dim\mathcal{O}_X = 2\operatorname{codim}\mathfrak{p}$.

2.2. Lemme. (i) *Tout élément de $\mathcal{S}$ est ou nilpotent ou semi-simple.*
(ii) *On a $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g}) = n_2(\mathfrak{g})$.*

Preuve. (i) Soient X un élément non nilpotent et non semi-simple de $\mathfrak{g}$, et $X = S + N$ sa décomposition de Jordan avec S semi-simple. On a $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{g}^S \cap \mathfrak{g}^N$. Pour montrer que $X \notin \mathcal{S}$, il suffit donc de prouver que $\mathfrak{g}^S \neq \mathfrak{g}^N$.

D'après le théorème de Jacobson-Morosov, il existe $T \in \mathfrak{g}$ tel que $[T, N] = 2N$. Ecrivons $T = \sum_{\lambda \in \Bbbk} T_\lambda$, avec $[S, T_\lambda] = \lambda T_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Bbbk$. Il vient immédiatement $[T_0, N] = 2N$. Ainsi, $T_0 \in \mathfrak{g}^S$ et $T_0 \notin \mathfrak{g}^N$.

(ii) Soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique et X un élément non nul du radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. On a $K(X, \mathfrak{p}) = 0$, donc $\mathfrak{p}$ est subordonnée à X. Il en résulte que $\dim\mathfrak{p} \leq d_X$, puis $\dim\mathcal{O}_X \leq 2\operatorname{codim}\mathfrak{p}$. Par suite, $n_1(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g})$.

Soient S un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant S, et R_1 le système de racines associé. Alors $R_1' = \{\alpha \in R_1;\ \alpha(S) = 0\}$ est un système de racines dans le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}_1^*$ qu'il engendre et, pour toute base B_1' de R_1', il existe une base B_1 de R_1 contenant B_1' ([1], p.165). A G-conjugaison près, on peut supposer $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h},\ R_1 = R,\ B_1 = B$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(B\backslash B_1')$, il vient :

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \sum_{\alpha \in R_1'} \Bbbk H_\alpha + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On en déduit immédiatement que $\mathfrak{p}$ est une polarisation en S. Alors $d_S = 2\operatorname{codim}\mathfrak{p}$ et $n_2(\mathfrak{g}) \geq 2l(\mathfrak{g})$.

Soit Σ une partie non vide de B. Il existe un unique élément S de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(S) = 0$ si $\alpha \in B\backslash\Sigma$ et $\alpha(S) = 1$ si $\alpha \in \Sigma$. On voit alors comme précédemment que $\mathfrak{p}(\Sigma)$ est une polarisation en S, et on en déduit $n_2(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g})$.

Compte-tenu de ce qui précède et de (i), on obtient alors $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g})$. $\square$

2.3. Soient N un élément nilpotent non nul et (N,S,M) un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}$, avec S semi-simple. A G-conjugaison près, on peut supposer que $N \in \mathfrak{n}$, $S \in \mathfrak{h}$, et $\alpha(S) \in \{0,1,2\}$ pour tout $\alpha \in B$ ([2], p.164). On a donc $\theta(S) \geq \alpha(S)$ pour tout $\alpha \in R$. On pose :

$$\mathfrak{g}_S(i) = \{X \in \mathfrak{g};\ [S,X] = iX\} \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

$$\mathfrak{p}_S = \sum_{i\geq 0} \mathfrak{g}_S(i), \quad \mathfrak{g}_S^2 = \sum_{i \geq 2} \mathfrak{g}_S(i).$$

On a $\mathfrak{g}^\theta \subset \mathfrak{g}_S^2$, et $\mathfrak{p}_S$ est une polarisation en S, donc une sous-algèbre parabolique. D'autre part, compte-tenu des résultats bien connus concernant les représentations de $\mathfrak{sl}(2)$, on a $\dim \mathfrak{g}^N = \dim \mathfrak{g}_S(0) + \dim \mathfrak{g}_S(1)$, et l'application $\mathfrak{p}_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ X \to [X,N]$ est surjective.

2.4. Proposition. *On conserve les notations de* 1.3 *et* 2.3*. Alors $\mathcal{O}_E$ est l'unique G-orbite nilpotente de dimension $n(\mathfrak{g})$ et, pour tout élément nilpotent non nul N de $\mathfrak{g}$, on a $\mathcal{O}_E \subset \overline{\mathcal{O}_N}$.*

Preuve. Soit P_S le plus petit sous-groupe algébrique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_S$. Pour $g \in P_S$, on a $g(N) \in \mathfrak{g}_2^S$, d'où une application $P_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ g \to g(N)$ dont la différentielle est l'application surjective $\mathfrak{p}_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ X \to [X,N]$. Il vient donc $\mathfrak{g}_S^2 \subset \overline{P(N)} \subset \overline{\mathcal{O}_N}$.

Comme $E \in \mathfrak{g}_S^2$, on a obtenu $\mathcal{O}_E \subset \overline{\mathcal{O}_N}$. Comme toute G-orbite est irréductible et ouverte dans son adhérence, et que $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g})$ d'après 2.2, on a obtenu le résultat. $\square$

2.5. Envisageons le cas où $(N,S,M) = (E,H,F)$. Comme $\theta(H) = 2$, on obtient $\alpha(H) \in \{0,1,2\}$ pour tout $\alpha \in R^+$. D'où $\mathfrak{g}_H(i) = \{0\}$ si $i \geq 3$.

Soient $\alpha \in R^+ \backslash \{\theta\}$ vérifiant $\alpha(H) > 0$, et $\beta = \theta - \alpha$. On a $(\theta|\alpha) > 0$, donc $\beta \in R$ ([1], p.148). Comme $2(\theta|\alpha) = (\theta|\theta)$ ([1], p.165), on obtient $\beta(H) > 0$. Par conséquent, $\alpha(H) = \beta(H) = 1$. On en déduit $\mathfrak{g}_H(2) = \Bbbk E$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_H(0) + \mathfrak{g}_H(1) + \Bbbk E$.

D'autre part, comme $\dim \mathfrak{g}^E = \dim \mathfrak{g}_H(0) + \dim \mathfrak{g}_H(1)$ et $[H,E] = 2E$, il vient $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{g}^E \oplus \Bbbk H$.

2.6. Posons

$$\pi = \{\alpha \in B;\ (\alpha|\theta) > 0\}, \quad \delta = \sum_{\alpha \in B} \alpha.$$

On a $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p}(\pi)$ et $\delta \in R$ ([1], p.160).

Lemme. *On suppose $l \geq 2$. Alors :*
(i) *Pour $\alpha \in B$, on a $\alpha(H) \in \{0,1\}$.*
(ii) *On a $0 < \#\pi \leq 2$ et $\#\pi = 2$ si et seulement si $\delta = \theta$.*

Preuve. (i) Comme $\mathfrak{g}_H(2) = \Bbbk E$, si $\alpha \in B$ vérifie $\alpha(H) = 2$, on obtient $\alpha = \theta$, donc $l = 1$. Contradiction.
(ii) De $\mathfrak{g}_H(2) \neq \{0\}$, on déduit $\pi \neq \emptyset$. Si $\#\pi \geq 3$, on obtient $\delta(H) \geq 3$, ce qui est absurde.
Supposons $\pi = \{\alpha, \beta\}$, avec $\alpha \neq \beta$. D'après (i), on a $\alpha(H) = \beta(H) = 1$, donc $\delta(H) = 2$, et $\delta = \theta$. La réciproque est claire d'après (i). $\square$

2.7. Lemme. (i) *Si E est polarisable, alors $\mathfrak{p}_H \subset \mathfrak{q}$ pour toute polarisation $\mathfrak{q}$ en E.*
(ii) *Si $\#\pi = 1$ et $l \geq 2$, E n'est pas polarisable et $n(\mathfrak{g}) < 2l(\mathfrak{g})$.*

Preuve. (i) Soit $\mathfrak{q}$ une polarisation en E. On a $K(E,H)=0$ et $K([E,\mathfrak{q}],\mathfrak{q})=K(E,[\mathfrak{q},\mathfrak{q}])=0$. On en déduit que l'élément nilpotent E appartient au radical nilpotent de $\mathfrak{q}$, donc $K(E,\mathfrak{q})=0$. Il en résulte que $\mathfrak{q}+\Bbbk H$ est subordonné à E, d'où $H\in\mathfrak{q}$. On sait que $\mathfrak{g}^E\subset\mathfrak{q}$, donc $\mathfrak{p}_H\subset\mathfrak{q}$ d'après 2.5.

(ii) Comme $\mathfrak{p}_H=\mathfrak{p}(\pi)$, si $\#\pi=1$, $\mathfrak{p}_H$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}$. Si E est polarisable, $\mathfrak{p}_H$ est donc l'unique polarisation en E d'après (i). Comme $\mathfrak{p}_H$ est aussi une polarisation en H, on obtient $\dim\mathfrak{g}^H=\dim\mathfrak{g}^E=\dim\mathfrak{g}_H(0)+\dim\mathfrak{g}_H(1)$. Ainsi, $\mathfrak{g}_H(1)=\{0\}$. C'est absurde car, $\#\pi\leq\dim\mathfrak{g}_H(1)$ d'après 2.6.

Si $n(\mathfrak{g})=2l(\mathfrak{g})$, toute sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ et de codimension $l(\mathfrak{g})$ est une polarisation en E. Contradiction. □

2.8. Il est bien connu (et ceci, sans utiliser les tables des systèmes de racines) que $\delta=\theta$ si et seulement si R est de type A_l. On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition. *Si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A_l, il existe dans $\mathfrak{g}$ une unique orbite non nulle $\mathcal{O}$ de dimension minimale. Cette orbite est nilpotente et, pour tout élément nilpotent non nul N de $\mathfrak{g}$, on a $\mathcal{O}\subset\overline{\mathcal{O}_N}$.*

2.9. Conservons les notations de 2.5, et supposons $\#\pi=2$, soit R de type A_l, avec $l\geq 2$. Comme θ est la seule racine positive α telle que $\alpha(H)=2$, on voit que les éléments de π sont nécessairement les sommets terminaux d'un graphe de Dynkin associé à B. Notons ces sommets α_1,α_l. On a $\mathfrak{p}_H=\mathfrak{p}(\alpha_1,\alpha_l)$. Les seules sous-algèbres paraboliques contenant strictement $\mathfrak{p}_H$ sont $\mathfrak{p}(\alpha_1)$ et $\mathfrak{p}(\alpha_l)$. Elles sont subordonnées à E et ont pour codimension l. D'après 2.7,(i), ce sont donc les seules polarisations en E.

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie,* Chap. IV-VI, Masson 1981.

[2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie,* Chap. VII-VIII, CCLS Diffusion, 1975.

[3] J. DIXMIER, Polarisations dans les algèbres de Lie II, *Bull. Soc. math. France,* 104, (1976), 145-164.

[4] A. JOSEPH, The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.,* 9 (1976), 1-30.

Université de Poitiers
Département de mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex, France