



**HAL**  
open science

# Application de l'estimateur de Julier et Uhlmann à l'évaluation rapide du taux d'erreur bit dans un système de communication numérique

Ludovic Collin, Philippe Rostaing, Olivier Berder, Gilles Burel

## ► To cite this version:

Ludovic Collin, Philippe Rostaing, Olivier Berder, Gilles Burel. Application de l'estimateur de Julier et Uhlmann à l'évaluation rapide du taux d'erreur bit dans un système de communication numérique. GRETSI (Groupe de Recherche et d'Etudes de Traitement du Signal et des Images) 2001, Sep 2001, Toulouse, France. hal-03223347

**HAL Id: hal-03223347**

**<https://hal.univ-brest.fr/hal-03223347v1>**

Submitted on 11 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Application de l'estimateur de Julier et Uhlmann à l'évaluation rapide du Taux Erreur Bit dans un système de transmission MIMO/OFDM

Ludovic COLLIN<sup>1</sup>, Philippe ROSTAING<sup>2</sup>, Olivier BERDER<sup>2</sup> et Gilles BUREL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut de Recherche de l'Ecole Navale  
BP 600, 29240 Brest Naval, France

<sup>2</sup>LEST-FRE CNRS 2269  
6 av. Le Gorgeu, BP 809, 29285 Brest Cedex, France  
collin@ecole-navale.fr, Philippe.Rostaing@univ-brest.fr  
Olivier.Berder@univ-brest.fr, Gilles.Burel@univ-brest.fr

**Résumé** – Pour évaluer le Taux Erreur Bit (TEB) dans le contexte des communications numériques multi-antennes (MIMO), nous proposons d'utiliser la transformation présentée par Julier et Uhlmann. L'approche consiste à choisir un ensemble pondéré d'échantillons « capturant » les moments du premier et du second ordre de la distribution du bruit additif (vecteur moyenne et matrice de covariance pour un système MIMO). La transformation non-linéaire réalisée par le récepteur MIMO est appliquée à l'ensemble des échantillons pour obtenir les statistiques des échantillons transformés. On peut alors estimer le TEB en utilisant la formule théorique qui relie le TEB et les statistiques calculées. On compare ici les performances du procédé avec les méthodes classiques de Monte-Carlo pour l'évaluation du TEB dans le cas d'un système MIMO associé à un Multiplex à Divisions de Fréquences Orthogonales (OFDM) et une Modulation d'Amplitude en Quadrature (MAQ). L'égalisation est réalisée par un décodeur linéaire de type « Zero Forcing » (ZF) ou un décodeur non-linéaire qui utilise l'algorithme V-BLAST.

**Abstract** – To evaluate the Bit Error Rate (BER) in the context of Multiple Input Multiple Output (MIMO) digital communications, we propose to use the second-order Unscented Transformation presented by Julier and Uhlmann. The approach consists in choosing a weighted set of samples such that they capture the first and second order moments of the distribution of the additive noise (mean vector and covariance matrix for MIMO system). The non-linear transformation described by the MIMO receiver is applied to the set of samples to obtain the statistics of the transformed samples. The estimation of the BER is then obtained by using a theoretical formula which links the BER and the calculated statistics (mean vector and covariance matrix of the noise after the receiver). Comparisons with Monte Carlo methods for the evaluation of the BER are performed. An Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) modulation with Quadrature Amplitude Shift Keying (QASK) mapping is used for simulations of the MIMO system and the equalization is either made by a linear “Zero Forcing” (ZF) decoder or a non-linear decoder using the V-BLAST (Bell Laboratories Layered Space Time) algorithm.

## 1 Introduction

Dans l'étude d'une chaîne de transmission numérique, les performances du système sont généralement exprimées en terme de Taux Erreur Bit (TEB) en fonction du Rapport Signal sur Bruit (RSB). Il est rarement possible d'obtenir ces courbes de façon analytique à cause de la structure du récepteur (non-linéarité, fonction implicite du type  $\arg \min$ , etc.). On est donc obligé de se rabattre sur des techniques numériques. La plus utilisée est la méthode de Monte Carlo (MC) qui consiste à faire un grand nombre de tirages de bruit pour obtenir une statistique à la sortie du récepteur. Cette méthode se révèle fastidieuse lorsque l'on cherche un jeu de courbes paramétrées ou que l'on veut descendre à des TEB faibles. D'autres méthodes du type « importance sampling » peuvent être mises en œuvre pour limiter le nombre de tirages [5].

Dans cet article, on applique aux communications numériques une méthode proposée par Julier et Uhlmann [4] qui s'affranchit du tirage aléatoire par un choix déter-

ministe des échantillons de la distribution du bruit. Ces échantillons permettent de calculer les deux premiers moments du bruit en sortie du récepteur puis d'estimer le TEB grâce à une formule théorique classique. La difficulté réside alors, pour la plupart des cas, dans l'obtention de la formule théorique de probabilité d'erreur (ou au moins une approximation). On présente des résultats dans le contexte d'un système de transmissions multi-antennes (MIMO) avec une modulation OFDM utilisant une constellation MAQ. On considère ici deux types de récepteur, le premier qui utilise un décodeur linéaire de type « Zero Forcing » et le second basé sur un décodeur non-linéaire utilisant l'algorithme V-BLAST [2]. Dans ce dernier cas, on ne dispose pas de formule du TEB mais nous en proposons une approximation qui prend en compte la stratégie propre de l'algorithme V-BLAST.

L'intérêt principal de la méthode de JU réside dans sa rapidité d'utilisation. En effet, on peut changer un certain nombre de paramètres, tel que le nombre d'états de la constellation, le nombre d'antennes, etc, pour avoir des

résultats rapides en terme de TEB sans avoir recours à chaque fois à des tirages de MC coûteux en temps de calcul. Les résultats obtenus sont suffisamment précis dans la majorité des cas, mais cette précision doit toutefois être validée en quelques points particuliers par un tirage de MC.

Le reste de l'article s'organise comme suit : dans la section suivante on décrit le principe du système de transmission MIMO/OFDM. La section 3 explique le fonctionnement de l'estimateur de Julier et Uhlmann tandis que son application à l'estimation du TEB est présentée dans la section 4. Dans la section 5 on propose des résultats de simulation dans le contexte MIMO/OFDM, avant de conclure et de donner quelques perspectives dans la section 6.

## 2 Système de transmission MIMO associé à une modulation OFDM

Les systèmes de transmission de type MIMO permettent d'atteindre des capacités très importantes (de l'ordre de 30 bit/s/Hz) grâce à l'exploitation de la diversité spatiale du canal. Mais la transmission est limitée par la durée symbole qui doit être grande devant la durée de la réponse impulsionnelle du canal, ce qui limite le débit dans le cas d'un canal avec de longs échos. L'utilisation d'une modulation OFDM classique dans un système MIMO permet de s'affranchir de cette contrainte simplement en assurant un temps de garde supérieur au dernier écho du canal.

On suppose que l'émetteur (avec  $n_t$  antennes) et le récepteur (avec  $n_r$  antennes) sont parfaitement synchronisés et que l'instant de décision est optimal. De même le canal est supposé avoir été estimé par le récepteur et la puissance totale émise  $p_0$  est équirépartie entre les  $n_t$  émetteurs.

On montre [1] que le système MIMO/OFDM équivalent en bande de base peut être vu comme  $P$  branches<sup>1</sup> parallèles et indépendantes d'un système MIMO mono-porteuse comme cela est décrit dans la figure 1.

Si  $\mathbf{a}_p = (a_{p1}, \dots, a_{pn_t})^T$  est le vecteur des symboles émis par la  $p^{\text{e}}$  sous-porteuse alors le vecteur reçu correspondant est décrit par la relation matricielle :

$$\mathbf{r}_p = H_p \mathbf{a}_p + \mathbf{b}_p \quad p = 1, \dots, P \quad (1)$$

où  $\mathbf{b}_p = (b_{p1}, \dots, b_{pn_r})^T$  est le vecteur de bruit additif, blanc, gaussien, centré, complexe de matrice de covariance  $\mathbf{R}_b = E[\mathbf{b}_p \mathbf{b}_p^T] = \sigma_b^2 I_{n_r}$ , où  $I_{n_r}$  est la matrice identité  $n_r \times n_r$ . La matrice de canal  $H_p$  de dimension  $n_r \times n_t$  est telle que l'élément  $h_{ij}$  représente le gain complexe entre le  $j^{\text{e}}$  émetteur et le  $i^{\text{e}}$  récepteur associé à la  $p^{\text{e}}$  sous-porteuse.

Nous allons utiliser ici deux types de récepteurs MIMO : le ZF et le V-BLAST qui peut être considéré comme un ZF itératif à retour de décision.

- Dans le cas du « Zero Forcing » le récepteur est linéaire, égal à  $G_p = H_p^\dagger$  (pseudo-inverse de  $H_p$ ) [2].
- Le principe de l'algorithme du récepteur V-BLAST est présenté dans [2] : le symbole de l'émetteur le plus favorisé (possédant le meilleur RSB) est démodulé en premier. Sa contribution à la réception est ensuite annulée,

<sup>1</sup>  $P$  est le nombre de sous-porteuses.

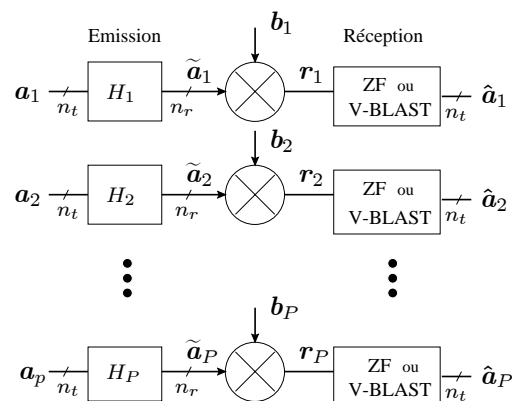


FIG. 1: Système équivalent en bande de base d'un MIMO avec une modulation OFDM

ce qui maximise le RSB sur les autres émetteurs à chaque bonne décision. Cette étape est répétée jusqu'au dernier émetteur, le moins favorisé.

Dans tout système de communication numérique le bruit en sortie du récepteur peut être vu comme la transformation du bruit d'entrée  $\mathbf{b}_p$  par le démodulateur. Nous allons pouvoir estimer la variance du bruit en sortie du récepteur à l'aide de la méthode JU, ce qui nous permettra d'estimer le TEB de la transmission.

## 3 Présentation de l'estimateur de Julier et Uhlmann

La méthode de Julier et Uhlmann [4], récemment proposée en robotique dans le cadre de la trajectographie est concurrente du filtre de Kalman Étendu. Elle permet l'estimation des deux premiers moments, vecteur moyenne  $\bar{\mathbf{y}}$  et matrice de covariance  $\mathbf{R}_y$ , d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{y}$ , provenant de la transformation  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{x}$  caractérisé par sa moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et sa matrice de covariance  $\mathbf{R}_x$ . La méthode représente les 2 premiers moments de  $\mathbf{x}$  par un ensemble de  $l$  échantillons  $\mathcal{X}_i$  de poids  $W_i$ . Pour  $\mathbf{x}$  vecteur de dimension  $n$ , on aura  $l = 2n + 1$  échantillons donnés par :

$$\mathcal{X}_0 = \bar{\mathbf{x}} \quad W_0 = \kappa / (n + \kappa) \quad (2)$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} + \left( \sqrt{(n + \kappa) \mathbf{R}_x} \right)_i \quad W_i = 1 / 2(n + \kappa) \quad (3)$$

$$\mathcal{X}_{i+n} = \bar{\mathbf{x}} - \left( \sqrt{(n + \kappa) \mathbf{R}_x} \right)_i \quad W_{i+n} = 1 / 2(n + \kappa) \quad (4)$$

où  $\left( \sqrt{(n + \kappa) \mathbf{R}_x} \right)_i$  correspond à la  $i^{\text{e}}$  ligne de la racine carrée de la matrice  $(n + \kappa) \mathbf{R}_x$ . Le paramètre  $\kappa$  donne un degré de liberté que l'on fixe à  $\kappa = 3 - n$  dans le cas où  $\mathbf{x}$  est un vecteur gaussien.

Ensuite, chacun des échantillons  $\mathcal{X}_i$  subit la transformation  $T$  pour donner les échantillons  $\mathcal{Y}_i = T(\mathcal{X}_i)$ . On obtient alors une estimée de la moyenne et de la covariance de  $\mathbf{y}$  :

$$\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{l-1} W_i \mathcal{Y}_i \quad \mathbf{R}_y = \sum_{i=0}^{l-1} W_i \{ \mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}} \} \{ \mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}} \}^T \quad (5)$$

## 4 Application à l'estimation du TEB

Dans un système MIMO/OFDM le TEB est la moyenne des TEB par émetteur et par sous-porteuse :

$$P_{eb} = \frac{1}{P} \frac{1}{n_t} \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n_t} p_{e_{ip}} \quad (6)$$

Nous allons utiliser une modulation MAQ-4 dont le TEB pour un système mono-émetteur et mono-récepteur, est donnée par :

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V^{\Re}}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V^{\Im}}} \quad (7)$$

où  $V^{\Re}$  et  $V^{\Im}$  sont les variances des parties réelle et imaginaire du bruit en sortie du récepteur<sup>2</sup>.

Avec un récepteur ZF, pour chaque émetteur, on peut injecter (7) dans (6) pour obtenir le TEB de la transmission (cf §4.1). Dans le cas d'un récepteur V-BLAST, le retour de décision implique une dépendance dans la démodulation des symboles. On ne pourra donc pas appliquer directement la stratégie précédente (cf §4.2).

### 4.1 Récepteur « Zero Forcing »

Afin d'estimer le bruit en sortie de récepteur ZF on forme, pour chaque sous-porteuse, un vecteur bruit de dimension  $2n_r$  en séparant partie réelle et partie imaginaire  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{\Re}; \mathbf{x}^{\Im}] = [\Re(\mathbf{b}_p); \Im(\mathbf{b}_p)]$ . La moyenne et la matrice de covariance du vecteur  $\mathbf{x}$  à l'entrée du récepteur sont données par<sup>3</sup> :

$$\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}] = \mathbf{0}_{2n_r}, \quad \mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \frac{\sigma_b^2}{2} I_{2n_r} \quad (8)$$

où  $\mathbf{0}_n$  est le vecteur nul de dimension  $n$ .

D'après (2-4) et (8), on construit les  $l$  échantillons  $\mathcal{X}_i$  qui « capturent » les moments d'ordre 1 et 2 du vecteur bruit  $\mathbf{x}$  ( $l = 2 \times 2n_r + 1$ ). Chaque  $\mathcal{X}_i$  forme un échantillon de bruit qui est ajouté à  $H_p \mathbf{a}_p$  puis est démodulé par le récepteur ZF pour donner  $\mathcal{Y}_i$ .

En appliquant (5) avec les pondérations  $W_i$ , on obtient une estimation du vecteur moyenne  $\bar{\mathbf{y}}$  et de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_y$  du bruit  $\mathbf{y}$  en sortie du récepteur.

On extrait de la matrice  $\mathbf{R}_y$  les parties réelles  $V_i^{\Re}$  et imaginaires  $V_i^{\Im}$  des variances de chaque émetteur ( $i = 1, \dots, n_t$ ). En appliquant la procédure à chaque sous-porteuse les équations (6) et (7) nous donnent le TEB.

Le traitement du récepteur ZF étant linéaire il est possible de calculer analytiquement la covariance du bruit en sortie du récepteur par :  $\mathbf{R}_n = G_p \mathbf{R}_b G_p^*$ . Les valeurs numériques obtenues en utilisant cette formule sont strictement identiques à celles estimées par la méthode de JU, ce qui était prévisible dans ce cas.

### 4.2 Récepteur V-BLAST

Pour le récepteur V-BLAST il faut tenir compte de l'ordre de démodulation des symboles. En effet lors de

<sup>2</sup>Les parties réelle et imaginaire du bruit sont supposées ici indépendantes.

<sup>3</sup>Notez que la méthode s'applique au cas général d'une matrice de covariance de bruit quelconque.

la prise de décision sur le 1<sup>er</sup> symbole trois cas peuvent se présenter<sup>4</sup> : i) le symbole est correct (probabilité  $\bar{p}_{t_{11}}$  donnée par (12)) ii) la partie réelle est fautive (probabilité  $p_{t_{11}}^{\Re}$  donnée par (10)) iii) la partie imaginaire est fautive (probabilité  $p_{t_{11}}^{\Im}$  donnée par (11)). Ceci implique trois matrices de covariance possibles pour le 2<sup>e</sup> symbole ( $\mathbf{R}_{21}$ ,  $\mathbf{R}_{22}$  et  $\mathbf{R}_{23}$ ) et donc trois TEB donnés par (9). Cette procédure se répète jusqu'à obtenir la structure en « arbre » de la figure 2 présentée pour 3 émetteurs.

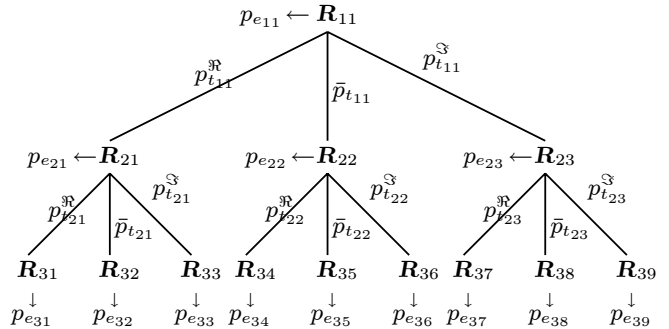


FIG. 2: Représentation en « arbre » des matrices de covariance  $\mathbf{R}_{ij}$  (sur les « nœuds ») et des probabilités de transition  $p_t$  (sur les « branches ») pour 3 niveaux (3 émetteurs classés dans l'ordre utilisé par le récepteur V-BLAST). À chaque  $\mathbf{R}_{ij}$  correspond le TEB  $p_{e_{ij}}$ .

La méthode utilisée étant une méthode à l'ordre 2 cela revient à approximer le bruit en sortie du récepteur V-BLAST par un bruit gaussien de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} V_{ij}^{\Re} & \times \\ \times & V_{ij}^{\Im} \end{bmatrix}$ . On utilise alors (7) pour obtenir le TEB correspondant :

$$p_{e_{ij}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V_{ij}^{\Re}}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V_{ij}^{\Im}}} \quad (9)$$

Les probabilités de transition sur les branches sont données par :

$$p_{t_{ij}}^{\Re} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V_{ij}^{\Re}}} \quad (10)$$

$$p_{t_{ij}}^{\Im} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{p_0}{2V_{ij}^{\Im}}} \quad (11)$$

$$\bar{p}_{t_{ij}} \simeq 1 - (p_{t_{ij}}^{\Re} + p_{t_{ij}}^{\Im}) \quad (12)$$

On obtient donc pour chaque émetteur les TEB suivants :

$$P_1 = p_{e_{11}} \quad (13)$$

$$P_2 = p_{t_{11}}^{\Re} p_{e_{21}} + \bar{p}_{t_{11}} p_{e_{22}} + p_{t_{11}}^{\Im} p_{e_{23}} \quad (14)$$

$$P_3 = p_{t_{11}}^{\Re} p_{t_{21}}^{\Re} p_{e_{31}} + \dots + p_{t_{11}}^{\Im} p_{t_{23}}^{\Im} p_{e_{39}} \quad (15)$$

Soit pour chaque sous-porteuse, le TEB :  $P_{eb} = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$ . Finalement le TEB du système de transmission V-BLAST associé à une modulation OFDM est obtenu en faisant la moyenne des TEB pour chaque sous-porteuse.

Les  $\mathbf{R}_{ij}$  sont estimées par la méthode de Julier et Uhlmann, les erreurs correspondantes à chaque branche étant

<sup>4</sup>On néglige les erreurs simultanées sur les parties réelle et imaginaire, d'où l'approximation (12).

introduites dans l'algorithme. Par exemple, la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{33}$  est estimée en introduisant une erreur sur la partie réelle du 1<sup>er</sup> symbole et une erreur sur la partie imaginaire du 2<sup>e</sup> symbole.

Ainsi en explorant les neuf branches de l'arbre nous estimons le TEB du récepteur V-BLAST avec seulement  $9 \times (4n_r + 1)$  vecteurs à démoduler pour chaque sous-porteuse. La précision du résultat obtenu est très bonne, comme le montrent les simulations ci-après.

## 5 Résultats expérimentaux

On compare ici les résultats de l'estimation du TEB entre la méthode de MC et JU pour une transmission MIMO/OFDM de  $P = 64$  sous-porteuses avec  $n_t = 3$  émetteurs,  $n_r = 5$  récepteurs et une MAQ-4. Ces résultats sont présentés pour les récepteurs ZF et V-BLAST. L'estimation du TEB par la méthode de JU est décrite dans les deux paragraphes précédents pour  $n_t = 3$  avec une modulation MAQ-4. Cette méthode peut se généraliser simplement pour un nombre plus grand d'émetteurs (l'arborescence de l'arbre de la figure 2 est plus important) et pour une constellation MAQ à  $M$  états (ou tout autre modulation avec une formule reliant le TEB au niveau de bruit en sortie du récepteur).

Le même canal est utilisé pour toutes les simulations (soit un seul tirage des matrices  $H_p$  pour  $p = 1, \dots, P$ ). Les courbes de TEB sont présentées en fonction du RSB à l'entrée du récepteur (rapport entre la puissance totale du signal après le canal et la puissance totale du bruit sur les récepteurs), donné par :

$$\text{RSB} = \frac{p_0 \sum_{p=1}^P \|H_p\|^2}{P n_t n_r \sigma_b^2} \quad \text{où } \|H_p\|^2 = \text{trace}(H_p^* H_p) \quad (16)$$

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 3. La méthode d'estimation du TEB par JU est validée en plusieurs points du RSB pour les deux récepteurs.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode numérique permettant d'obtenir très rapidement le TEB d'un système de transmission numérique multi-antennes. Dérivée de l'algorithme proposé par Julier et Uhlmann, cette méthode utilise le même démodulateur que les techniques MC, et permet de vérifier beaucoup plus rapidement que ces dernières les résultats théoriques. L'algorithme du démodulateur peut ainsi être modifié simplement, sans refaire le programme d'estimation et l'on peut tester l'influence des modifications apportées à la chaîne de communications numériques.

On a montré que cette technique pouvait s'appliquer au contexte de transmission MIMO avec un démodulateur de type V-BLAST qui connaît actuellement un fort engouement dans les systèmes à grande efficacité spectrale.

Dans cet article l'estimation se fait sur les deux premiers moments. Dans les cas où la statistique est non-gaussienne, la méthode de Julier et Uhlmann peut s'étendre à l'ordre 4 pour affiner l'estimation [3]. D'autre part, on

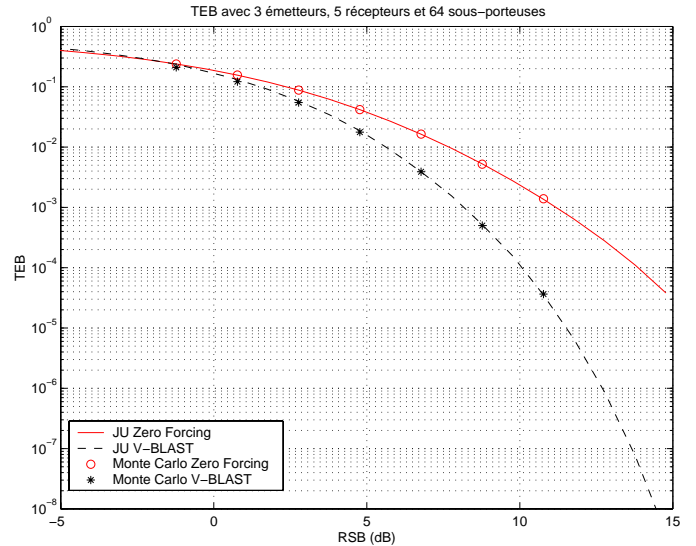


FIG. 3: Comparaison du TEB entre les méthodes JU et MC pour les récepteurs ZF/OFDM et V-BLAST/OFDM. Les paramètres de simulation sont :  $n_t = 3$ ,  $n_r = 5$ ,  $P = 64$  et 10 000 paquets de 3 symboles pour l'estimation par MC.

a considéré ici que le vecteur aléatoire à l'entrée de l'algorithme JU ne tenait compte que des caractéristiques du bruit. On peut éventuellement augmenter ce vecteur aléatoire en y incluant les statistiques du canal, par exemple pour la simulation d'un canal de Rayleigh, Rice, etc. Un autre travail ultérieur serait de proposer une variante à cette méthode dans le cas d'une transmission en présence d'IES importantes ou de codes correcteurs d'erreurs en sortie du démodulateur car, actuellement, la méthode proposée est une méthode point à point (transformation « sans mémoire »).

## Références

- [1] H. Bölcskei, D. Gesbert, and A. J. Paulraj. On the capacity of OFDM-based multi-antenna systems. *IEEE ICASSP*, June 2000.
- [2] G. D. Golden, C. J. Foschini, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolniansky. Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture. *Electronics letters*, 35(1), January 1999.
- [3] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. A consistent, unbiased method for converting between polar and cartesian coordinate systems. *SPIE Proceedings*, 3086 :110–121, 1997.
- [4] J. K. Uhlmann S. J. Julier and H. F. Durrant-Whyte. A new approach for the nonlinear transformation of means and covariances in linear filters. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996.
- [5] K. S. Shanmugam and P. Balaban. A modified monte-carlo simulation technique for the evaluation of error rate in digital communication systems. *IEEE Trans. Communications*, 28(11) :1916–1924, November 1980.